コラッツ予想と同値な命題の発見について

西村美輝 寺下誠 福田陸人 輿石美優 森瑞稀　久保誠貴
大阪府立富田林高等学校

Ａｂｓｔｒａｃｔ

The theme of the research we conducted this is “Collatz's prediction”. It is an unsolved problem of the number theory. We researched it with a computer. The experiments were conducted to find a clue to solve this prediction. We researched it using a numerical formula. As a result of the research, we found a proposition of the same value as “Collatz's prediction”.

1. はじめに

今回、私たち数学班が行った研究の主題は、ドイツの数学者であるローター・コラッツが提起した「コラッツ予想」とよばれる数学上の未解決問題である。

コラッツ予想とは

「任意の正の整数ｎをとり、ｎが偶数の場合、ｎを２で割る。ｎが奇数の場合、ｎに３をかけて１を足す。」

という操作を繰り返すと、すべての自然数が１に到達するという予想である。

例）初期値 40→20→10→5→16→8→4→2→1

2. 目的

本研究の目的は「コラッツ予想」証明の糸口を見つけることである。そのために、「コラッツ予想」の操作をかえたときに、どのようなループに到達するかを数値実験によってしらべ、そこで得られた予想とコラッツ予想が同値であることを証明した。

3. 数値実験

3.1 実験方法

「任意の正の整数ｎをとり、

・ｎが偶数の場合、ｎを２で割る

・ｎが奇数の場合、ｎに３をかけて 2k-1 をたす（k は正の整数）

という操作を繰り返す」

という計算を$1 \leq n \leq 10000$の範囲で Excel を用いて行った。そして、ループ中に現れる数の最小値を表にまとめた。

3.2 実験結果

2k-1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
ループ中の最小値	1	3	1 5 19 23 187 347	5 7	9	1 11 13	1 13 131 211 227 251 259 283 287 319	3 15 57 69 561 1041	1 17 23	5 19	15 21	5 7 23 41
2k-1	25	27	29	31	33	35	～	81	243	729	2187	6561
ループ中の最小値	5 7 17 25 95 115 935 1735	27	1 11 29 3811 7055	13 31	3 33 39	7 13 17 25 35 133 161 1309 2513		81	243	729	2187	6561

3.3 数値実験の考察

2k-1 の値が１すなわち「コラッツ予想」の操作を行う場合だけでなく、3,9,27,81,243,749 の場合でも、一つの数に到達した。このことから、コラッツ予想を拡張させた「任意の正の整数 n をとり、n が偶数の場合、n を２で割る。n が奇数の場合、n に３をかけて 3^p を足す。」という操作を繰り返すと、どうなるか、という問題と、すべての自然数が 3^p に到達するという予想をたてることにした。また、この問題を「3n+3ᵖ 問題」、予想を「3n+3ᵖ 予想」と呼ぶことにする。

4. 証明

これから**「コラッツ予想」と**「$3n+3^p$ 予想」が同値であることの証明をする。

「$3n+3^p$ 問題」の操作の逆演算について考える。

「$3n+3^p$ 問題」の操作は操作後の数を N とおくと

$$\frac{n}{2}=N\cdot\cdot\cdot 操作\mathrm{A}$$

$$n\times 3+3^p=N\cdot\cdot\cdot 操作\mathrm{B}$$

この操作の逆は

$$N \times 2 = n \cdot\cdot\cdot A'$$

$$\frac{N-3^p}{3} = n \cdot\cdot\cdot B'$$

である。

3^p からこの操作を繰り返すと「3n+3^p 予想」が成り立つ数を表すことができる。

ここで、3^p から操作 A'を x_1 回、操作 B'を 1 回行ったときに表される数は、

$$\frac{3^p \times 2^{x_1} - 3^p}{3}$$

この操作を m 回繰り返すと

$$\frac{3^p \cdot 2^{x_1+\cdots+x_m} - (3^p \cdot 2^{x_1+\cdots+x_{m-1}} + \cdots + 3^{p+m-1} \cdot 2^0)}{3^m}$$

・・・①

なお、この式で表される数は「3n+3^p 問題」において、操作 B を行われる数、すなわち奇数である。

ここから、式①を用いて「3n+3^p 予想」と「$3n + 3^{p+1}$予想」の関係について述べていく。

「$3n + 3^{p+1}$予想」が正しいと仮定すると、

$$\frac{3^{p+1} \cdot 2^{x_1+\cdots+x_m} - (3^{p+1} \cdot 2^{x_1+\cdots+x_{m-1}} + \cdots + 3^{p+1+m-1} \cdot 2^0)}{3^m}$$

$$\ni 2k-1$$

となる。

両辺を 3 で割ると、

$$\frac{3^p \cdot 2^{x_1+\cdots+x_m} - (3^p \cdot 2^{x_1+\cdots+x_{m-1}} + \cdots + 3^{p+m-1} \cdot 2^0)}{3^m} \ni \frac{2k-1}{3}$$

また、

$$\frac{2k-1}{3} \ni 2k-1$$

よって

$$\frac{3^p \cdot 2^{x_1+\cdots+x_m} - (3^p \cdot 2^{x_1+\cdots+x_{m-1}} + \cdots + 3^{p+m-1} \cdot 2^0)}{3^m}$$

$$\ni 2k-1$$

したがって、「$3n + 3^{p+1}$予想」が正しければ、「$3n + 3^p$予想」が正しい。

次に、「$3n + 3^p$予想」が正しいと仮定する。

ここで、「$3n + 3^p$問題」の n の範囲を$\frac{2k-1}{3}$に広げると、$\frac{2k-1}{3}$は操作 A を x 回、操作 B を 1 回行うと、必ず自然数になるので、n の範囲を広げた場合も「$3n + 3^p$予想」は正しい。

よって、

$$\frac{3^p \cdot 2^{x_1+\cdots+x_m} - (3^p \cdot 2^{x_1+\cdots+x_{m-1}} + \cdots + 3^{p+m-1} \cdot 2^0)}{3^m} \ni \frac{2k-1}{3}$$

が成り立つ。

両辺を 3 倍すると

$$\frac{3^{p+1} \cdot 2^{x_1+\cdots+x_m} - (3^{p+1} \cdot 2^{x_1+\cdots+x_{m-1}} + \cdots + 3^{p+1+m-1} \cdot 2^0)}{3^m}$$

$$\ni 2k-1$$

したがって、「$3n + 3^p$予想」が正しければ、「$3n + 3^{p+1}$予想」が正しい。

以上から、「$3n + 3^p$予想」と「$3n + 3^{p+1}$予想」は同値である。

また、**「コラッツ予想」は**「$3n + 3^p$予想」において p=0 の場合である。

よって、**「コラッツ予想」と**「3n+3^p 予想」は同値である。

5. 結論

本研究で**「コラッツ予想」と同値な命題である**「3n+3^p 予想」を発見することができた。

ここから、「コラッツ予想」を証明するには「3n+3^p 予想」の p の値がいくらの場合を証明してもいいことが分かった。この研究成果が「コラッツの問題」解決に繋がることを期待している。

6. 参考文献

隅山孝夫　発行日 2015 年 3 月 31 日　「コラッツ予想に関するいくつかの関数について」